Дәріс3
Математикалық физиканың негізгі теңдеулері: Жылуөткізгіштік теңдеуін қорытып шығару

Жылу өткізгіштік теңдеуі жалпы диффузия теңдеуімен өрнектеледі:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = div(pgradu) - qu + F(x,t). \qquad (1)$$

Жылу өткізгіштік теңдеуін келтіріп шығарамыз. $x = (x_1, x_2, x_3)$ нүктесінің t уақыттағы температурасын $u(x,t)$ арқылы, осы нүктені өз ішіне алған кез-келген көлемді V арқылы белгілеп аламыз. V ның шекарасы S болсын. Әртүрлі детальдардың температурасы түрліше болса, онда көбірек қызған детальдан азырақ қызған детальға қарап жылу пайда болатындығы белгілі. V да (t_1, t_2) уақыт аралығында жылу өзгеруін тексереміз.

Фурье заңы негізінде, S сырттың ΔS бөлігінен Δt уақытта өтетін жылу мөлшері ΔQ_1, $\Delta S \cdot \Delta t$ және температураның нормал бойынша туындысы $\frac{\partial u}{\partial n}$ ге пропорциональ болады, яғни

$$\Delta Q = -k\Delta S \cdot \Delta t \cdot \frac{\partial u}{\partial n} = -k\Delta S \cdot \Delta t grad_n u, \qquad (2)$$

бұл жерде к > 0 функция – ішкі жылу өткізгіштік коэффициенті, n – жылу әрекетінің қозғалысы бойынша ΔS ке өткізілген нормаль.

S сырт арқылы (t_1, t_2) уақыт аралығында V көлемге кіретін жылу мөлшері (2) формула негізінде

$$Q_1 = -\int_{t_1}^{t_2} dt \iint_S k(x) \frac{\partial u}{\partial n} ds \qquad (3)$$

ға тең. n – S сыртқа өткізілген ішкі нормаль, себебі жылу S тің ішіне жатыр. V көлем ΔV бөлегінің температурасын Δt уақытта Δu ге өзгерту үшін қолданылатын жылулық мөлшері.

$$\Delta Q_2 = [u(x, t + \Delta t) - u(x,t)] p(x) \gamma(x) \Delta V$$

ға тең, мұнда $\rho(x)$, $\gamma(x)$ - заттың тығыздығы және жылулық сыйымы (берілген затты 1^0 С қа ысыту үшін керек болған жылу мөлшері.) Демек, V көлем температурасын $\Delta u = u(x,t_2) - u(x,t_1)$ ке өзгерту үшін керек болған жылу мөлшері

$$\Delta Q_2 = \int_V [u(x,t_2) - u(x,t)] \gamma(x) \Delta V \qquad (4)$$

ке тең.

$$u(x,t_2) - u(x,t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} dt$$

болғаны үшін (4) теңдік мына көріністе жазылады:

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \gamma p \frac{\partial u}{\partial t} dV \qquad (5)$$

Бірлік уақыт ішінде бірлік көлемнен ажыралған немесе оған сіңіп кеткен жылу мөлшерін $F(x,t)$ арқылы белгілеп аламыз.

V көлемнен (t_1, t_2) уақыт аралығында ажыралатын немесе щған сіңіп кететін жылу мөлшері

$$Q_3 = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V F(x,t) dV$$

ге тең. Енді баланс теңдеуін түземіз. $Q_2 = Q_1 + Q_3$ екені белгілі, яғни

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \gamma p \frac{\partial u}{\partial t} dV = -\int_{t_1}^{t_2} dt \int_S k \frac{\partial u}{\partial n} ds + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V F(x,t) dt \qquad (6)$$

$u(x,t)$ функцияны x_1, x_2, x_3 кеңістіктегі координаталар бойынша екі мәрте, t бойынша бір мәрте дифференциалданатын және бұл туындылар тексерілетін облыста үздіксіз деп есептеп,

$$\frac{\partial u}{\partial n} = grad_n u$$

теңдікті ескеріп, Гаусс – Остроградский формуласы негізінде

$$\int_S k \frac{\partial u}{\partial n} dS = -\int_V div(kgradu) dV$$

теңдікке ие боламыз. Осыдан (6) формула мына көріністе жазылады:

$$\int_{t_1}^{t} dt \int_V \left[\gamma\rho \frac{\partial u}{\partial t} - div(kgradu) - F(x,t) \right] dV = 0$$

Бұдан V көлем және (t_1, t_2) уақыт аралығы кез – келген болғаны үшін

$$\gamma\rho \frac{\partial u}{\partial t} = div(kgradu) + F(x,t) \qquad (7)$$

жылу өткізгіштік теңдеуін келтіріп шығарамыз.

Егер зат біртекті болса, яғни γ, ρ және k функциялар тұрақты болса, (50) теңдеу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(x,t) \qquad (8)$$

көрініске келеді, мұнда $a^2 = \frac{k}{\gamma\rho}$, $f = \frac{F}{\gamma\rho}$

(8) теңдеу жылу өткізгіштік теңдеуі деп аталады.

Лаплас теңдеуі $\Delta u = 0$, Пуассон теңдеуі $\Delta u = f(x,u,z)$, Гельмгольц теңдеуі $\Delta u + \chi^2 u = f(x,u,z), \chi -$ тұрақты -бұлар математикалық физиканың негізгі теңдеулері.

Математикалық физика әдістерін зерттейтін құбылысты анықтайтын шамаларды таңдап, сонан соң физика-химиялық заңдылықтар мен қағидаларды пайдаланып, белгісіздер мен белгілі шамаларды байланыстыратын теңдеулер немесе теңдеу жүйесін құрады. Әдетте дифференциалдық теңдеулердің шеміндері көп болады. Солардың ішінен қажетті жалғыз шешімін таңдап алу үшін қосымша шарттар белгілі заңдар негізінде қорытылады.

Лаплас және Пуассон теңдеулеріне қойылатын қарапайым есептер.

Дирихле есебі: $u(x) \in C(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ класта жататын Ω аймақта гармониялық және

$$u(x)/s = \varphi(x), \quad x \in S$$

шекаралық шартты қанағаттандыратын $u(x)$ функцияны анықтау, мұндағы $\psi(x)$ аймақ S шекарасында берілген үзіліссіз функция.

Нейман есебі: $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ класта жататын, Ω аймақта гармониялық

$$\left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_S = \psi(x), \quad x \in S$$

шекаралық шартты қанағаттандыратын $u(x)$ функцияны анықтау, мұндағы N Ω аймақ шекарасы S сыртқы нормалы, ал $\psi(x)$ сол шекарада берілген үзіліссіз функция.

Нейман есебі шешілуі үшін

$$\int_S \frac{\partial u}{\partial N} dS = 0 \qquad (1)$$

қажетті шарт орындалу керек.

Әдетте Нейман есебі үшін (1) шарт орындалса, онда ол есеп дұрыс қойылған деп аталады.